С-12 | Определение положения ц. т. тела.

К-1 | Опр е скорости и ускорения точки по заданным ур-м её движения

К-1 новая

$$\sin\eta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{5}{\sqrt{5^2+5^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\cos\eta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+d^2}} = \frac{\sqrt{5^2+5^2}}{\sqrt{5^2+5^2+2^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{54}} = \frac{5}{3\sqrt{3}};$$

$$\cos\theta = \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+d^2}} = \frac{2}{\sqrt{54}}.$$

Из уравнения (2)

$$S_6''' = 1/2\cdot G = 1/2\cdot 6 = 3 \text{ кН}, \quad \text{но} \quad S_6''' = S_6\cos\theta,$$

откуда

$$S_6 = \frac{S_6'''}{\cos\theta} = \frac{3\sqrt{54}}{2} = 11{,}03 \text{ кН}.$$

Из уравнения (3)

$$S_5 = \frac{Pb + S_6''a}{b\cos\varphi} = \frac{P}{\cos\varphi} + \frac{S_6 a\sin\theta\cos\eta}{b\cos\varphi} =$$

$$= \frac{9\sqrt{41}}{5} + \frac{1{,}5\cdot\sqrt{54}\cdot 5\cdot\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{54}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{41}}{5\cdot 5} = 3{,}3\sqrt{41} = 21{,}1 \text{ кН}.$$

Из уравнения (1)

$$S_4 = -\frac{1}{2}G - S_5\sin\varphi = -\frac{1}{2}6 - 3{,}3\sqrt{41}\,\frac{4}{\sqrt{41}} =$$

$$= -3 - 13{,}2 = -16{,}2 \text{ кН}.$$

Из уравнения (5)

$$S_3 = -\frac{S_6''}{\cos\psi} = -\frac{S_6\sin\theta\cos\eta}{\cos\psi} =$$

$$= -\frac{1{,}5\cdot\sqrt{54}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{54}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{41}}{5} = -1{,}5\sqrt{41} = -9{,}62 \text{ кН}.$$

Из уравнения (4)

$$S_1 = \frac{P}{\cos\varphi} - S_5 + \frac{S_6'}{\cos\varphi} = \frac{P}{\cos\varphi} - S_5 + \frac{S_6\sin\theta\sin\eta}{\cos\varphi} =$$

$$= \frac{9\sqrt{41}}{5} - 3{,}3\sqrt{41} + \frac{1{,}5\cdot\sqrt{54}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{54}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{41}}{5} =$$

$$= (1{,}8 - 3{,}3 + 1{,}5)\sqrt{41} = 0.$$

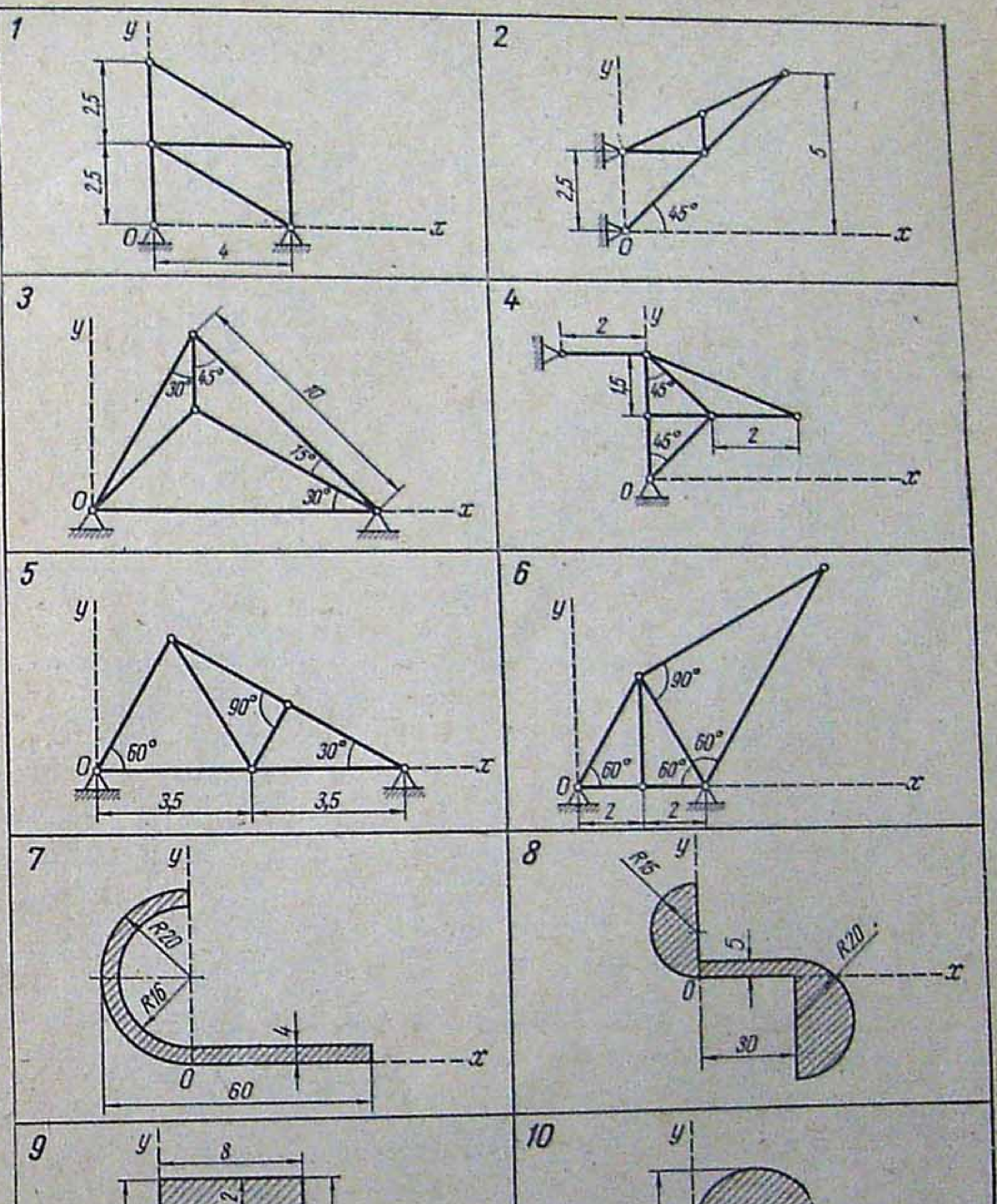

1
y
x
O
2,5
2,5
4
2
y
x
O
2,5
5
45°
3
y
x
O
30°
45°
10
15°
30°
4
y
x
O
2
1,5
45°
45°
2
5
y
x
O
60°
90°
30°
3,5
3,5
6
y
x
O
90°
60°
60°
60°
2
2
7
y
x
O
R20
R16
4
60
8
y
x
O
R16
5
R20
30
9
y
x
O
8
2
4
2
2
2
4
2
10
12
10
y
x
O
15
4
8
8
Ø20
2

Рис. 67

Из уравнения (6)

$$S_2 = -G - S_1 \sin\varphi - S_3 \sin\psi - S_4 - S_5 \sin\varphi + S_6''' =$$
$$= -G - (S_1 + S_5)\sin\varphi - S_3 \sin\psi - S_4 + S_6 \cos\theta =$$
$$= -6 - (0 + 3{,}3\sqrt{41})\frac{4}{\sqrt{41}} - (-1{,}5\sqrt{41})\frac{4}{\sqrt{41}} -$$
$$-(-16{,}2) + 1{,}5\sqrt{54}\frac{2}{\sqrt{54}} = 6 \text{ кН}.$$

Результаты расчета даны в табл. 18.

Таблица 18

Номер стержня	1	2	3	4	5	6
Знак усилия		+	−	−	+	+
Усилие, кН	0	6	9,62	16,2	21,1	11,03

Из данных табл. 18 видно, что стержни *2*, *5* и *6* растянуты, стержни *3* и *4* сжаты, а стержень — *1* «нулевой».

Для проверки правильности проведенных расчетов составим уравнение моментов, например, относительно оси z_1.

$$\Sigma M_{iz_1} = -S_1 \cos\varphi \cdot b + S_3 \cos\psi \cdot a + S_6' b = -S_1 \cos\varphi \cdot b + S_3 \cos\psi \cdot a +$$
$$+ S_6 \sin\theta \sin\eta \cdot b = 0 + (-1{,}5\sqrt{41})\frac{5}{\sqrt{41}} \cdot 5 + 1{,}5\sqrt{54}\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{54}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \times$$
$$\times 5 = -37{,}5 + 37{,}5 = 0.$$

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

Задание С-12. Определение положения центра тяжести тела

Найти координаты центра тяжести плоской фермы, составленной из тонких однородных стержней одинакового погонного веса (варианты 1 — 6), плоской фигуры (варианты 7 — 18 и 24 — 30) или объема (варианты 19 — 23), показанных на рис. 67 — 69. В вариантах 1 — 6 размеры указаны в метрах, а в вариантах 7 — 30 — в сантиметрах.

Пример выполнения задания. Определить координаты центра тяжести плоской фигуры, показанной на рис. 70.

Решение. Координаты центра тяжести площади определяем по формулам:

$$x_C = \frac{\Sigma F_i x_i}{F}; \qquad y_C = \frac{\Sigma F_i y_i}{F}. \qquad (1)$$

Чтобы воспользоваться этими формулами, площадь делим на отдельные части, положения центров тяжести которых известны.

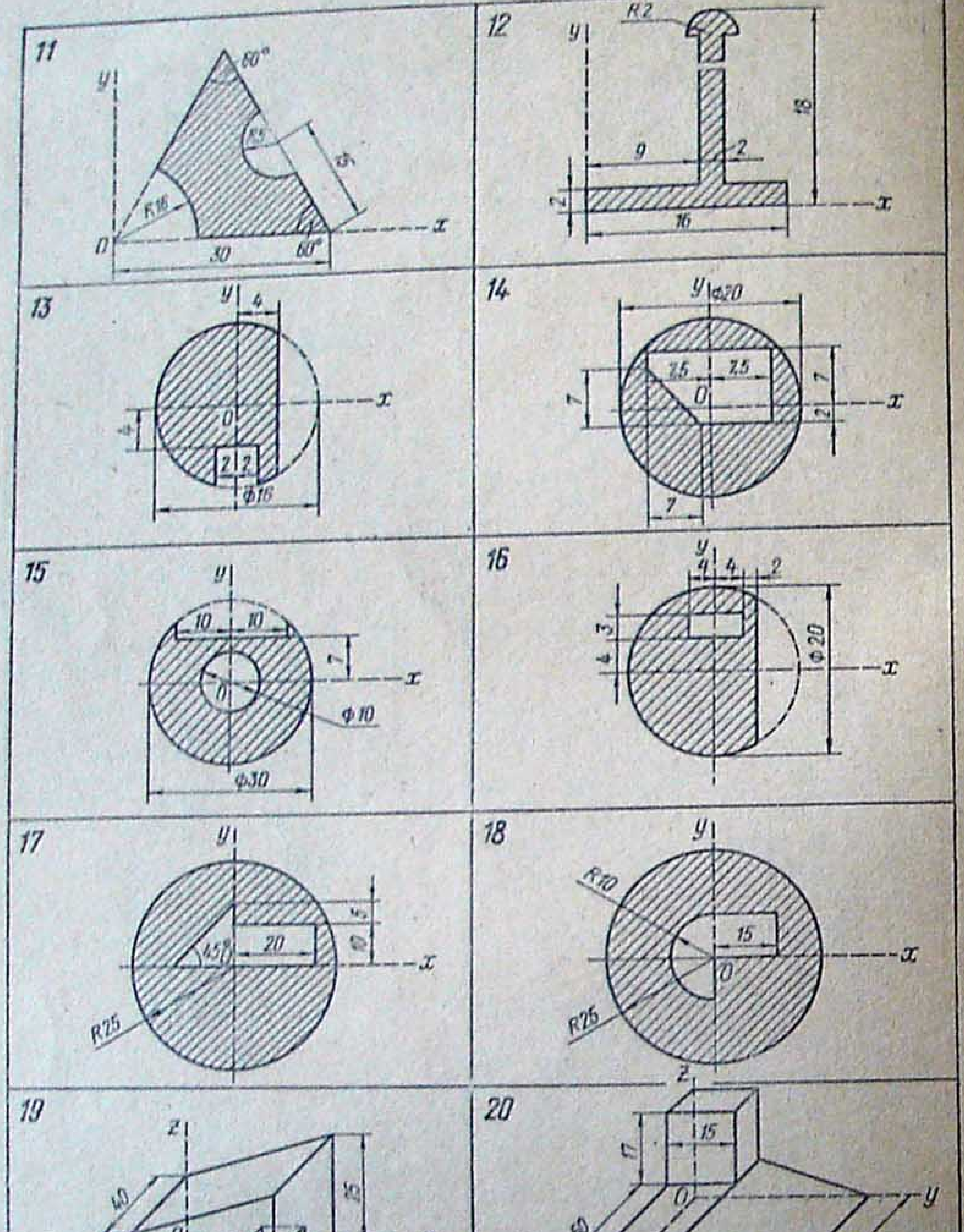

11
60°
R5
15
R16
O
30
60°
x
y
12
R2
y
18
9
2
2
16
x
13
y
4
x
O
4
2
2
Φ16
14
y
Φ20
7,5
7,5
O
7
7
2
7
x
15
y
10
10
7
x
O
Φ10
Φ30
16
y
4
4
2
4
3
Φ20
x
17
y
20
45°
5
10
x
R25
18
y
R10
15
x
O
R25
19
z
40
O
y
15
25
10
20
10
25
x
20
z
15
17
O
y
60
80
10
40
x

Рис. 68

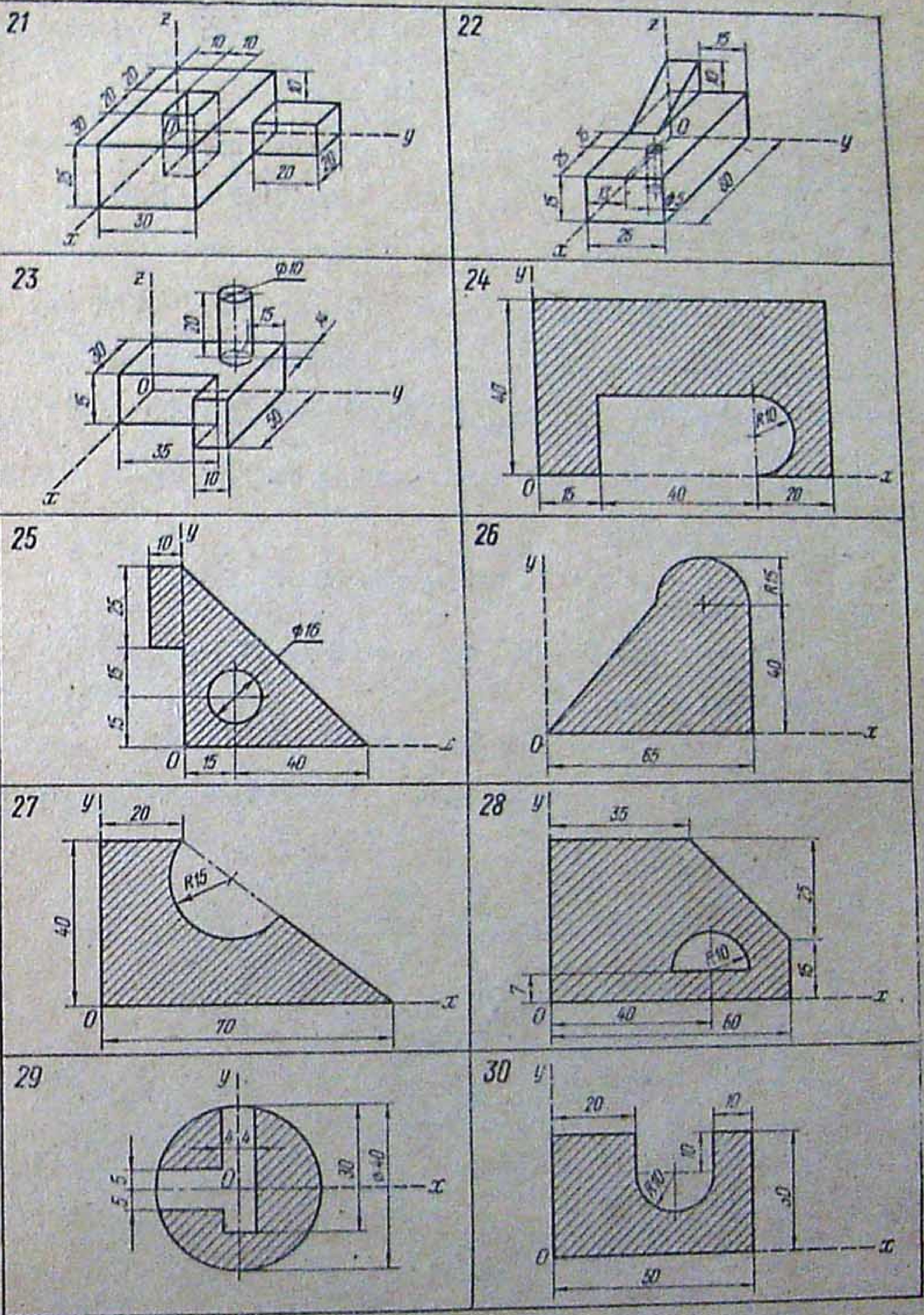


Рис. 69

В данном случае такими частями являются: прямоугольник, треугольник и половина круга (рис. 71). Площадь половины круга, вырезанную из площади прямоугольника, считаем стрицательной.

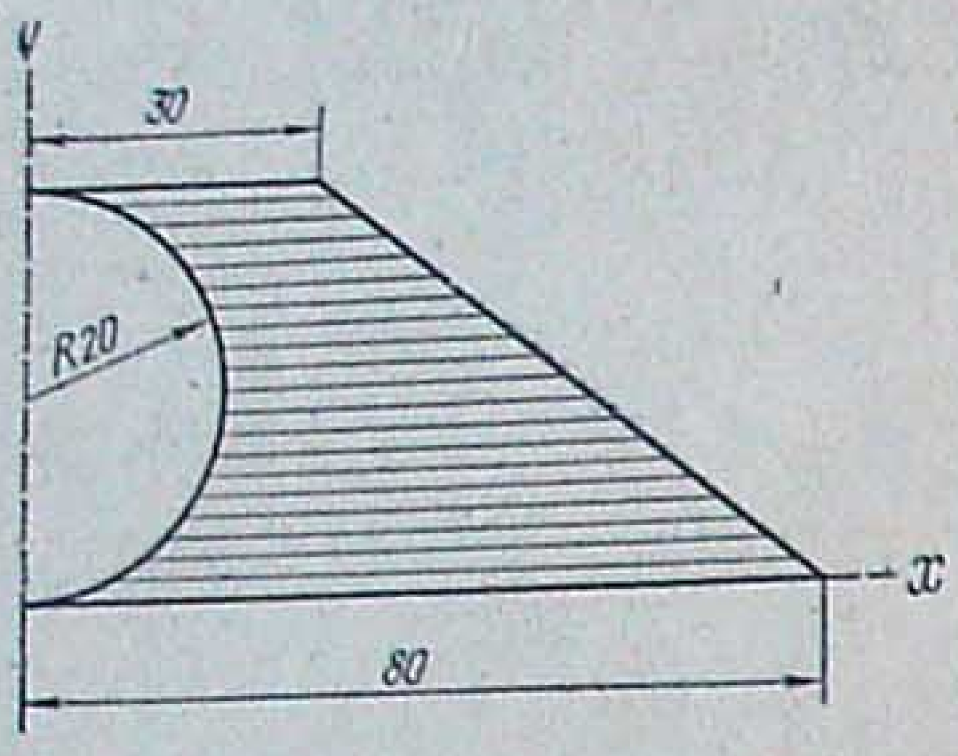


Рис. 70

Имеем:

площадь прямоугольника

$$F_1 = 40 \cdot 30 = 1200 \text{ см}^2;$$

площадь треугольника

$$F_2 = (40 \cdot 50)/2 = 1000 \text{ см}^2;$$

площадь половины круга

$$F_3 = (\pi \cdot 20^2)/2 = 200\pi = 628 \text{ см}^2.$$

Центры тяжести рассматриваемых частей фигуры имеют следующие координаты:

для прямоугольника:

$$x_1 = 15 \text{ см};\ y_1 = 20 \text{ см};$$

для треугольника

$$x_2 = 30 + 50/3 = 46{,}7 \text{ см};\ y_2 = 40/3 = 13{,}3 \text{ см};$$

для половины круга

$$x_3 = 4R/3\pi = (4 \cdot 20)/3\pi = 8{,}5 \text{ см};\ y_3 = 20 \text{ см}.$$

Для вычисления координат центра тяжести плоской фигуры составляем таблицу (табл. 19).

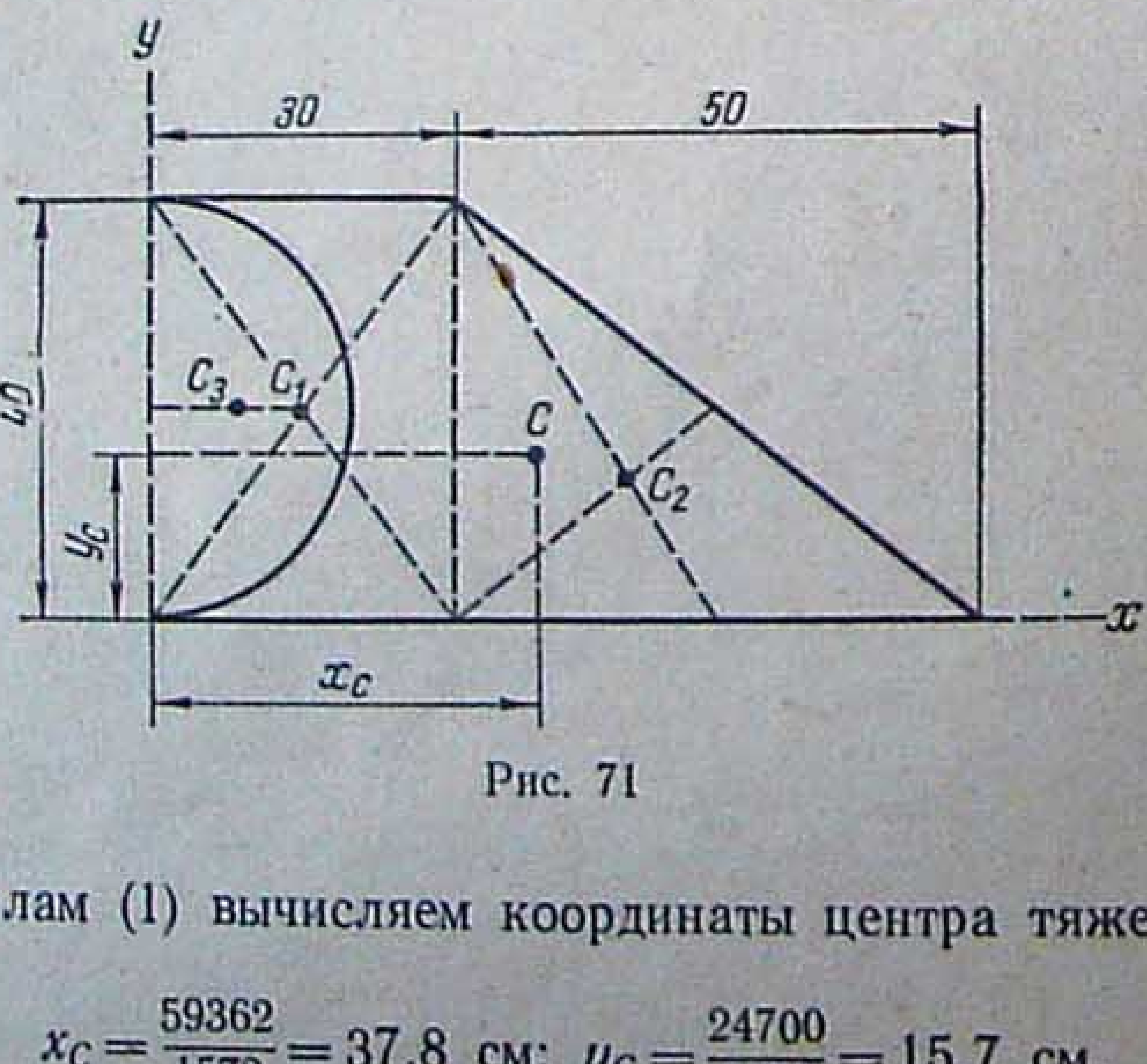


Рис. 71

По формулам (1) вычисляем координаты центра тяжести плоской фигуры:

$$x_C = \frac{59362}{1572} = 37{,}8 \text{ см};\ y_C = \frac{24700}{1572} = 15{,}7 \text{ см}.$$

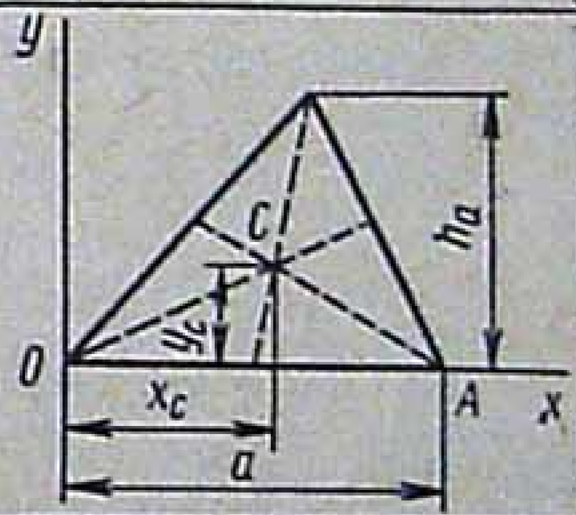
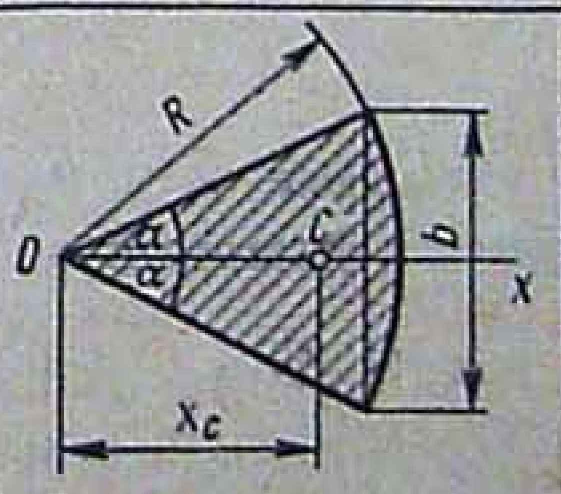
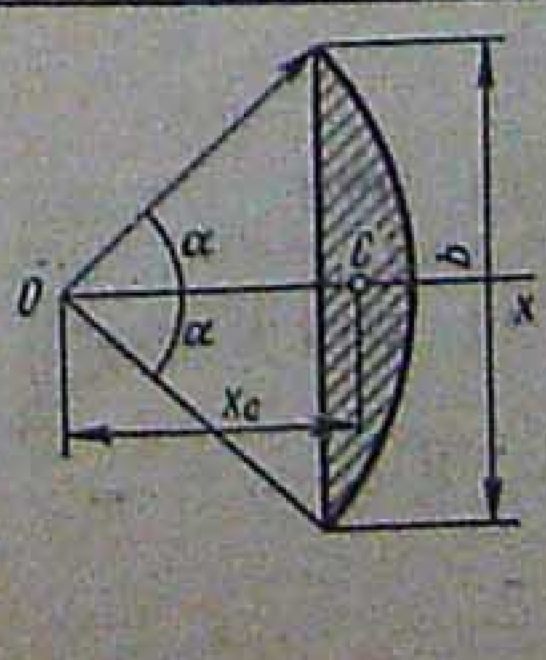
Таблица 19

Номер элемента	F_i, см²	x_i, см	y_i, см	$S_{iy}=F_i \cdot x_i$, см³	$S_{ix}=F_i y_i$, см³
1	1200	15,0	20,0	18000	24000
2	1000	46,7	13,3	46700	13300
3	—628	8,5	20,0	—5338	—12560
Σ	1572	—	—	59362	24700

Центр тяжести площади указан на рис. 71.

Примечание. Площади и координаты центров тяжести некоторых плоских фигур, встречающихся при выполнении заданий, приведены в табл. 20.

Таблица 20

Плоская фигура		Площадь	Координаты центра тяжести
Треугольник		$F=1/2 \cdot ah_a$	$y_C=1/3 \cdot h_a$ $x_C=1/3 \cdot (x_1+x_2+x_3)$, где x_1, x_2, x_3—координаты вершин O, A, B
Круговой сектор		$F=\alpha R^2$	$x_C=\frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}=\frac{R^2 b}{3F}$
	$\alpha=\pi/2$ (полукруг)	$F=\pi R^2/2$	$x_C=4R/3\pi$
	$\alpha=\pi/6$	$F=\pi R^2/6$	$x_C=2R/\pi$
Круговой сегмент		$F=1/2 \cdot R^2 \times$ $\times(2\alpha-\sin 2\alpha)$	$x_C=\frac{4R\sin^3\alpha}{3(2\alpha-\sin 2\alpha)}=\frac{b^3}{12F}$

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ. КИНЕМАТИКА

В этом разделе содержатся 12 заданий по кинематике точки, кинематике твердого тела и сложному движению. По каждой теме предлагаются задания различной трудности. Так, задание К-2 сложнее, чем К-1. Наиболее полно охватывающим тему плоского движения является задание К-6.

Каждое из заданий К-5, К-6, К-7, К-8, К-11 и К-12, как показано в примерах, можно полностью или частично выполнить различными способами. Однако обязательное использование двух способов предусмотрено только в условии задания К-6.

Предполагается, что выбор способа выполнения других заданий произволен или определяется преподавателем.

I. Кинематика точки

ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ И КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Задание К-1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения

По заданным уравнениям движения точки M установить вид ее траектории и для момента времени $t=t_1$ (с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории в соответствующей точке.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 21.

Пример выполнения задания. Исходные данные в см и с:

$$x=4t;\ y=16t^2-1; \qquad (1)$$
$$t_1=1/2.$$

Решение. Уравнения движения (1) являются параметрическими уравнениями траектории точки M. Чтобы получить уравнение траектории в обычной координатной форме, исключим время t из уравнений движения.

Тогда

$$y=x^2-1. \qquad (2)$$

Таблица 21

Номер варианта	Уравнения движения		t_1, с
	$x=x(t)$, см	$y=y(t)$, см	
1	$-2t^2+3$	$-5t$	1/2
2	$4\cos^2(\pi t/3)+2$	$4\sin^2(\pi t/3)$	1
3	$-\cos(\pi t^2/3)+3$	$\sin(\pi t^2/3)-1$	1
4	$4t+4$	$-4/(t+1)$	2
5	$2\sin(\pi t/3)$	$-3\cos(\pi t/3)+4$	1
6	$3t^2+2$	$-4t$	1/2
7	$3t^2-t+1$	$5t^2-5t/3-2$	1
8	$7\sin(\pi t^2/6)+3$	$2-7\cos(\pi t^2/6)$	1
9	$-3/(t+2)$	$3t+6$	2
10	$-4\cos(\pi t/3)$	$-2\sin(\pi t/3)-3$	1
11	$-4t^2+1$	$-3t$	1/2
12	$5\sin^2(\pi t/6)$	$-5\cos^2(\pi t/6)-3$	1
13	$5\cos(\pi t^2/3)$	$-5\sin(\pi t^2/3)$	1
14	$-2t-2$	$-2/(t+1)$	2
15	$4\cos(\pi t/3)$	$-3\sin(\pi t/3)$	1
16	$3t$	$4t^2+1$	1/2
17	$7\sin^2(\pi t/6)-5$	$-7\cos^2(\pi t/6)$	1
18	$1+3\cos(\pi t^2/3)$	$3\sin(\pi t^2/3)+3$	1
19	$-5t^2-4$	$3t$	1
20	$2-3t-6t^2$	$3-3t/2-3t^2$	0
21	$6\sin(\pi t^2/6)-2$	$6\cos(\pi t^2/6)+3$	1
22	$7t^2-3$	$5t$	1/4
23	$3-3t^2+t$	$4-5t^2+5t/3$	1
24	$-4\cos(\pi t/3)-1$	$-4\sin(\pi t/3)$	1

Номер варианта	Уравнения движения		t_1, с
	$x=x(t)$, см	$y=y(t)$, см	
25	$-6t$	$-2t^2-4$	1
26	$8\cos^2(\pi t/6)+2$	$-8\sin^2(\pi t/6)-7$	1
27	$-3-9\sin(\pi t^2/6)$	$-9\cos(\pi t^2/6)+5$	1
28	$-4t^2+1$	$-3t$	1
29	$5t^2+5t/3-3$	$3t^2+t+3$	1
30	$2\cos(\pi t^2/3)-2$	$-2\sin(\pi t^2/3)+3$	1

Это выражение есть уравнение параболы.

Для определения скорости точки находим проекции скорости на оси координат:

$$v_x=\dot{x}=4 \text{ см/с}; \quad v_y=\dot{y}=32t \text{ см/с}.$$

Модуль скорости точки

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}. \tag{3}$$

Аналогично проекции ускорения точки

$$w_x=\ddot{x}=0; \quad w_y=\ddot{y}=32 \text{ см/с}^2.$$

Модуль ускорения точки

$$w=\sqrt{w_x^2+w_y^2}=32 \text{ см/с}^2.$$

Координаты точки, а также ее скорость, ускорение и их проекции на координатные оси для заданного момента времени $t=1/2$ с приведены в табл. 22.

Таблица 22

Координаты, см		Скорость, см/с			Ускорение, см/с²					Радиус кривизны, см
x	y	v_x	v_y	v	w_x	w_y	w	w_τ	w_n	ρ
2	3	4	16	16,5	0	32	32	31	7,94	34,3

Касательное ускорение находим путем дифференцирования модуля скорости (3):

$$w_\tau=\left|\frac{dv}{dt}\right|;$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{2v_x\dot{v}_x+2v_y\dot{v}_y}{2\sqrt{v_x^2+v_y^2}}=\frac{v_xw_x+v_yw_y}{v}.$$

При $t=1/2$ с

$$\frac{dv}{dt}=\frac{4\cdot 0+16\cdot 32}{16{,}5}=31\ \text{см/с}^2.$$

Следовательно, модуль касательного ускорения

$$w_\tau=31\ \text{см/с}^2.$$

Знак «+» при dv/dt показывает, что движение точки ускоренное и, следовательно, направления $\vec{w}_\tau$ и $\vec{v}$ совпадают.

Нормальное ускорение точки в данный момент времени

$$w_n=\sqrt{w^2-w_\tau^2}=\sqrt{32^2-31^2}=7{,}94\ \text{см/с}^2.$$

Радиус кривизны траектории в той точке, где при $t=1/2$ с находится точка M,

$$\rho=v^2/w_n=16{,}5^2/7{,}94=34{,}3\ \text{см}.$$

Полученные значения w_τ, w_n и ρ также приведены в табл. 22.

Пользуясь уравнением (2), строим траекторию (рис. 72) и показываем на ней положение точки M в заданный момент времени. Вектор $\vec{v}$ строим по составляющим $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$, причем этот вектор должен быть направлен по касательной к траектории точки. Вектор $\vec{w}$ находим как по составляющим $\vec{w}_x$ и $\vec{w}_y$, так и по $\vec{w}_\tau$ и $\vec{w}_n$, чем контролируется правильность вычислений.

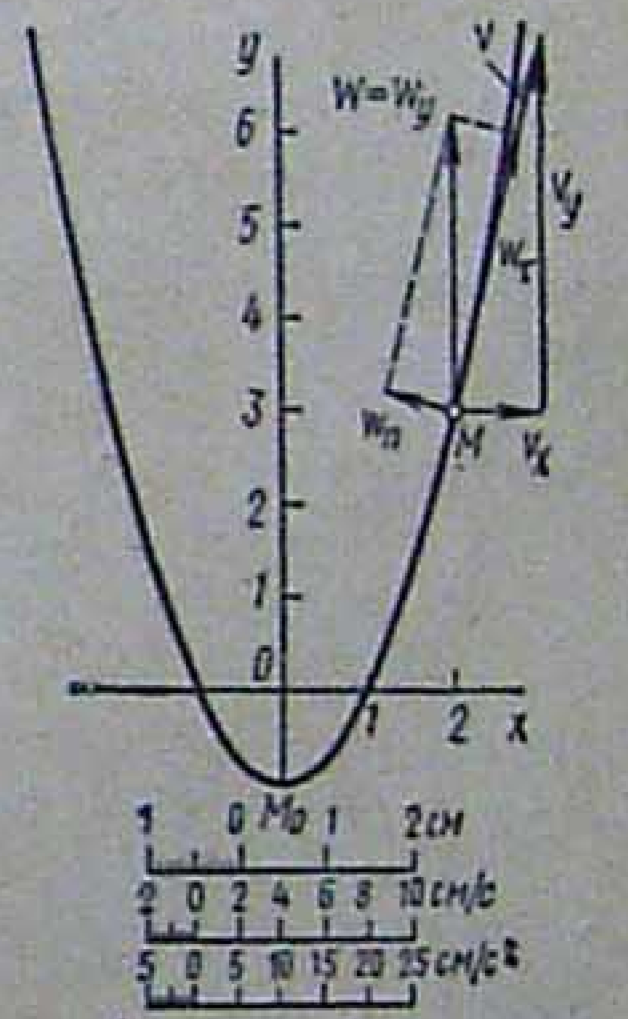


Рис. 72

Дополнение к заданию К-1. Уравнения движения точки на плоскости (табл. 21) можно использовать и для задания движения точки в пространстве, если дополнительно к табл. 21 задать третье уравнение $z=z(t)$, которое приведено в табл. 23.

Пример выполнения задания. Исходные данные (в см и с):

$$x=\frac{4}{t+1};\quad y=-4t-4;\quad z=2t+2;\quad t_1=0. \tag{4}$$

Решение. Уравнения (4) являются параметрическими уравнениями траектории точки в пространстве. Исключая параметр t из первого и второго уравнений этой системы, а также из второго и третьего, находим:

$$xy=-16; \tag{5}$$

$$y=-2z. \tag{6}$$

Уравнение (5) выражает в плоскости xOy равностороннюю гиперболу, для которой оси координат служат асимптотами. В пространстве этому уравнению соответствует гиперболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz.

Таблица 23

Номер варианта	$z = z(t)$, см	Номер варианта	$z = z(t)$, см	Номер варианта	$z = z(t)$, см
1	$3t$	11	$2t$	21	$4t$
2	$2t$	12	$3t$	22	t
3	$1,5t$	13	$1,5t$	23	$1,5t$
4	$4t+4$	14	$2t+2$	24	$2t$
5	t	15	$3t$	25	$5t$
6	$3t$	16	$1,5t$	26	$6t$
7	$2,5t$	17	$5t$	27	$3,5t$
8	$5t$	18	$3,5t$	28	$4t$
9	$4t+8$	19	$6t$	29	$5t$
10	t	20	$2t$	30	$1,5t$

Уравнение (6) выражает в плоскости yOz прямую, проходящую через начало координат, а в пространстве — плоскость, содержащую ось Ox.

Траектория точки представляет собой линию пересечения этих двух поверхностей: гиперболического цилиндра и плоскости (рис. 73).

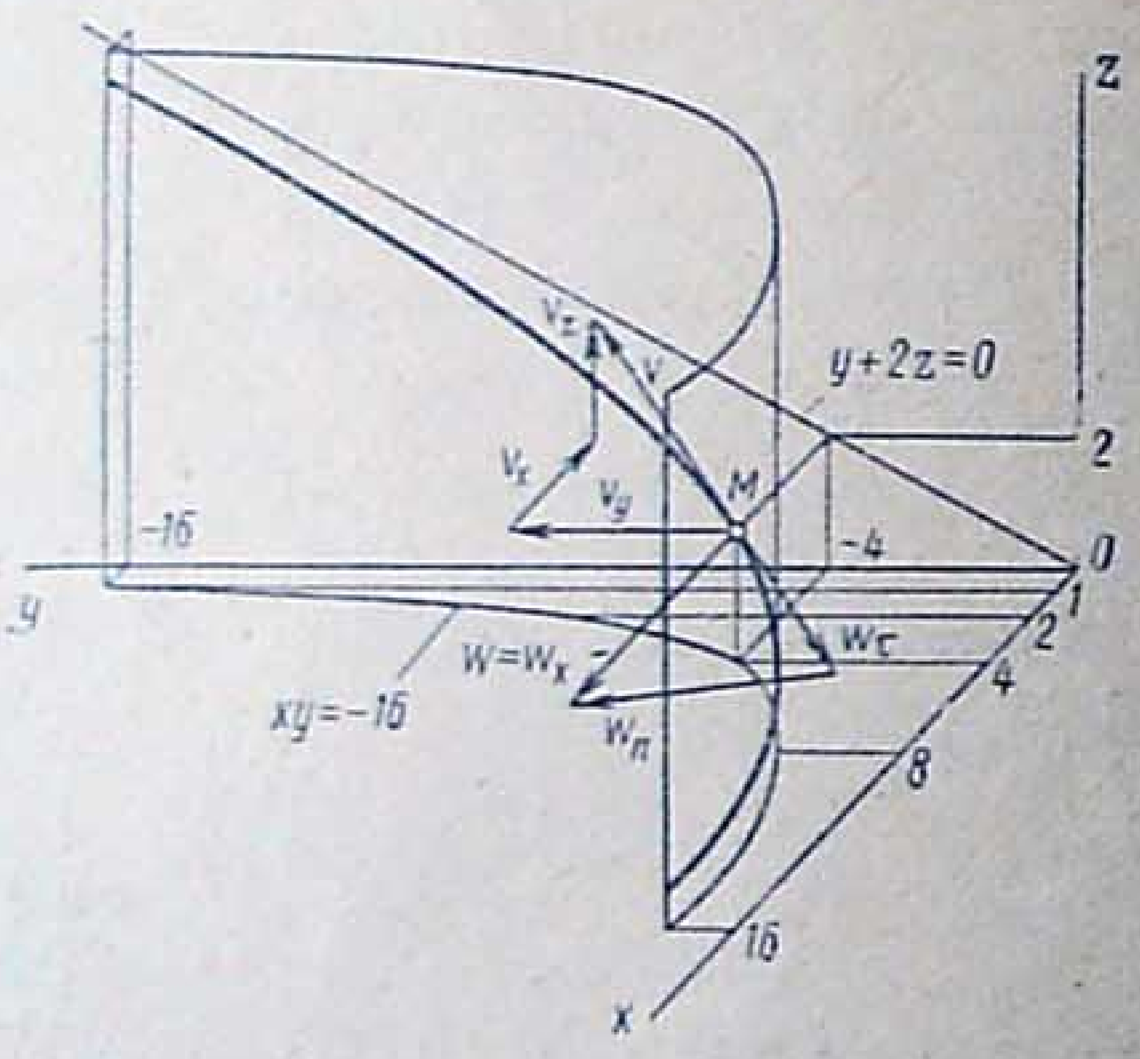


Рис. 73

Проекции скорости точки на оси координат:

$$v_x = \dot{x} = -\frac{4}{(t+1)^2} \text{ см/с};$$

$$v_y = \dot{y} = -4 \text{ см/с};$$

$$v_z = \dot{z} = 2 \text{ см/с}.$$

Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{2}{(t+1)^2}\sqrt{4 + 5(t+1)^4} \text{ см/с}.$$

Проекции ускорения точки

$$w_x = \ddot{x} = \frac{8}{(t+1)^3}; \quad w_y = \ddot{y} = 0; \quad w_z = \ddot{z} = 0.$$

Модуль ускорения

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \frac{8}{(t+1)^3} \text{ см/с}^2.$$

Координаты точки, ее скорость, ускорение и их проекции на оси координат для заданного момента времени $t = 0$ приведены в табл. 24.

Таблица 24

Координаты, см			Скорость, см/с				Ускорение, см/с²						Радиус кривизны, см
x	y	z	v_x	v_y	v_z	v	w_x	w_y	w_z	w	w_τ	w_n	ρ
4	−4	2	−4	−4	2	6	8	0	0	8	5,33	5,96	6,04

Модуль касательного ускорения

$$w_\tau = \left| \frac{dv}{dt} \right|,$$

где $$\frac{dv}{dt} = \frac{v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z}{v} = \frac{-4 \cdot 8}{6} = -5{,}33 \text{ см/с}^2.$$

Знак «—» при dv/dt показывает, что движение точки замедленное.

Касательное ускорение $\vec{w}_\tau$ направлено в сторону, противоположную скорости.

Нормальное ускорение

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = \sqrt{8^2 - 5{,}33^2} = 5{,}96 \text{ см/с}^2.$$

Радиус кривизны

$$\rho = v^2/w_n = 6^2/5{,}96 = 6{,}04 \text{ см}.$$

Полученные значения w_τ, w_n и ρ также приведены в табл. 24.

На рис. 73 показаны положение точки M в заданный момент времени, а также ее скорость и ускорение, построенные по составляющим $\vec{v}_x$, $\vec{v}_y$, $\vec{v}_z$ и $\vec{w}_x$, $\vec{w}_y$, $\vec{w}_z$.

Вектор $\vec{w}_\tau$ откладываем по касательной к траектории в сторону, противоположную направлению скорости. Вектор $\vec{w}_n$ определяется как разность $\vec{w}_n = \vec{w} - \vec{w}_\tau$.

Задание К-2. Составление уравнений движения точки и определение ее скорости и ускорения

Для точки M заданного механизма составить уравнения движения, вычертить участок ее траектории и для момента времени $t = t_1$ найти скорость точки, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории в соответствующей точке.

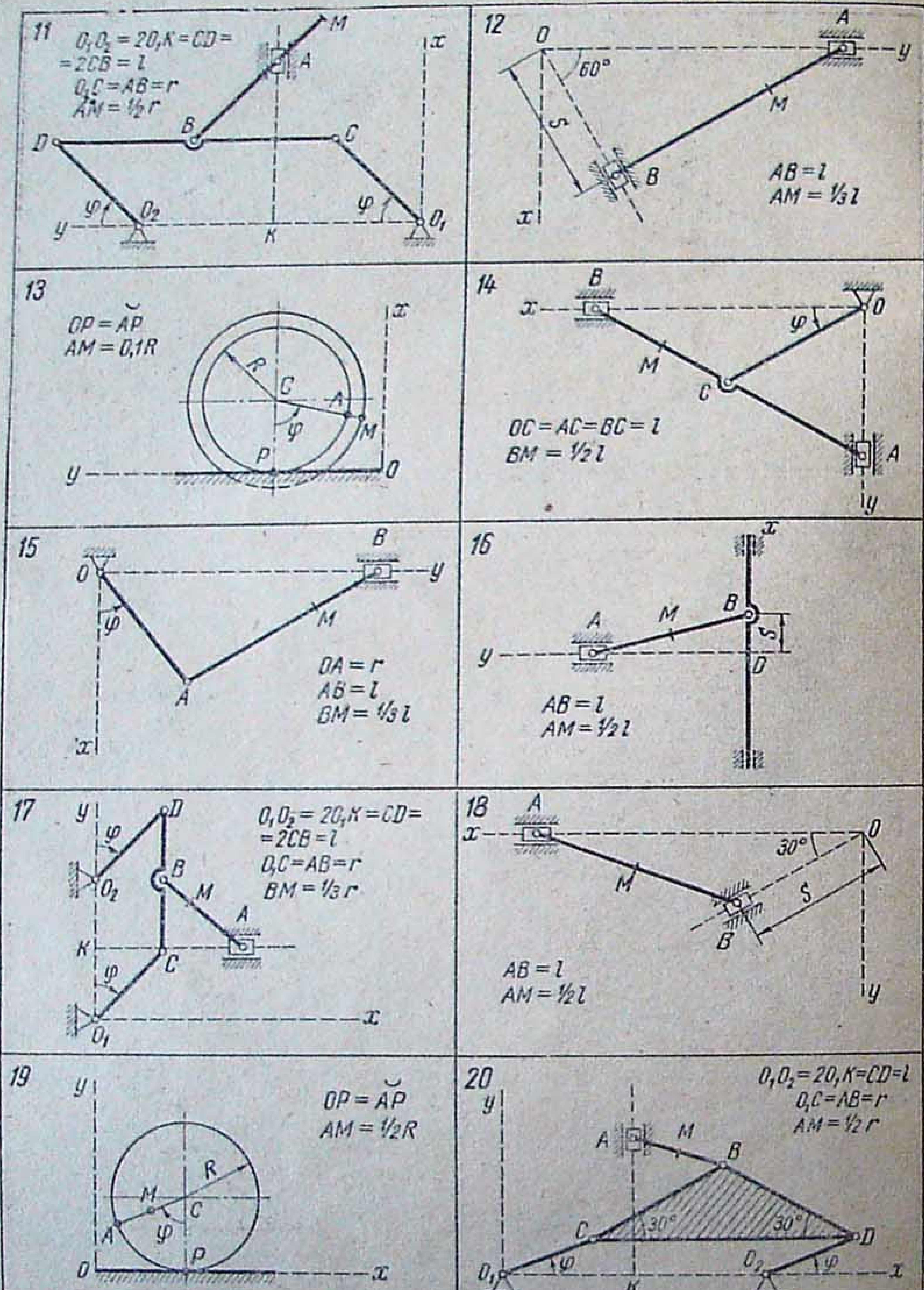

11
O₁O₂ = 2O₁K = CD = = 2CB = l
O₁C = AB = r
AM = ½ r
12
AB = l
AM = ⅓ l
60°
13
OP = ⌣AP
AM = 0,1R
14
OC = AC = BC = l
BM = ½ l
15
OA = r
AB = l
BM = ⅓ l
16
AB = l
AM = ½ l
17
O₁O₂ = 2O₁K = CD = = 2CB = l
O₁C = AB = r
BM = ⅓ r
18
AB = l
AM = ½ l
30°
19
OP = ⌣AP
AM = ½R
20
O₁O₂ = 2O₁K = CD = l
O₁C = AB = r
AM = ½ r
30°
30°

Рис. 75

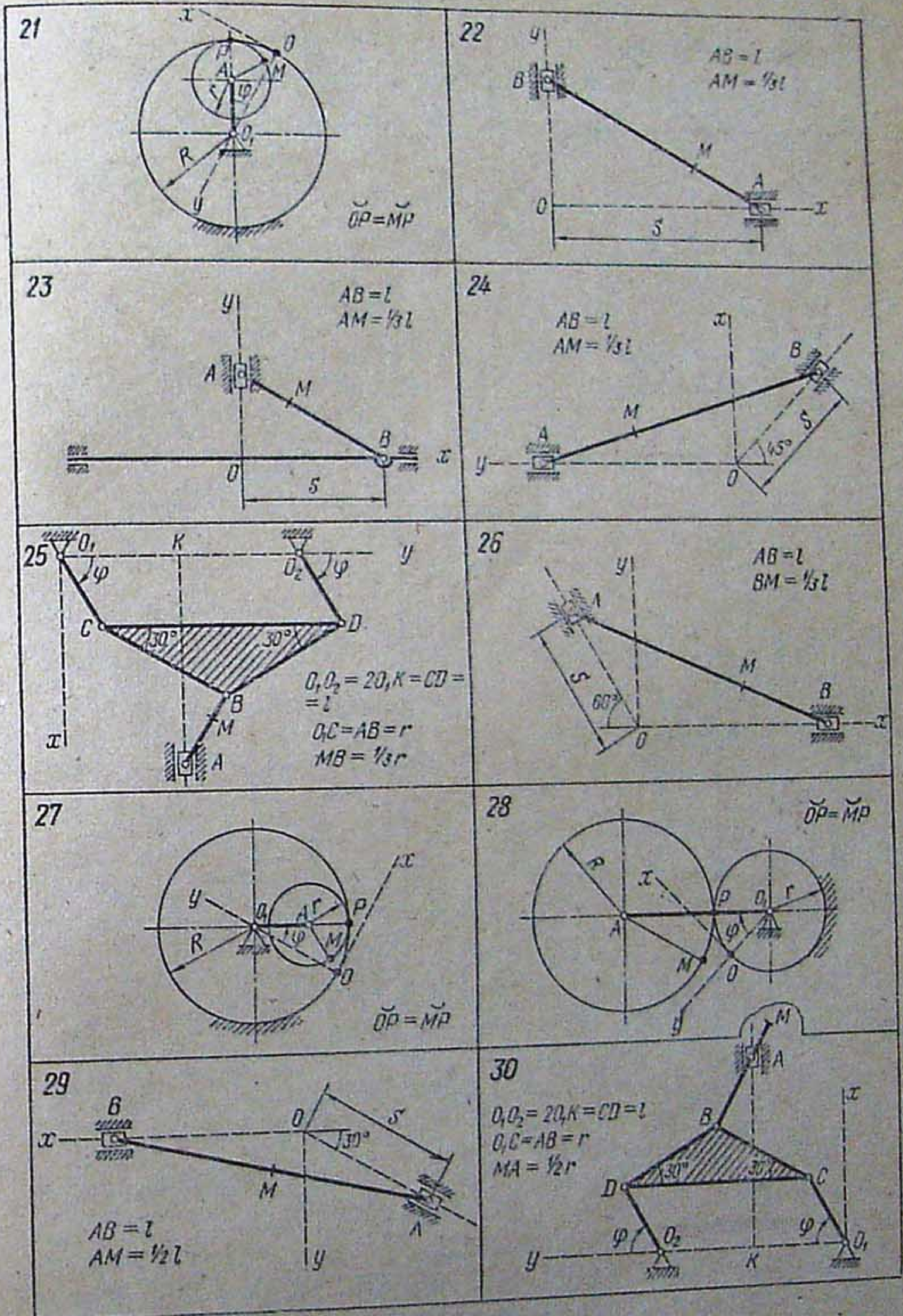

21
$\breve{OP} = \breve{MP}$
22
AB = l
AM = 1/3 l
23
AB = l
AM = 1/3 l
24
AB = l
AM = 1/3 l
25
$O_1O_2 = 2O_1K = CD = l$
$O_1C = AB = r$
MB = 1/3 r
26
AB = l
BM = 1/3 l
27
$\breve{OP} = \breve{MP}$
28
$\breve{OP} = \breve{MP}$
29
AB = l
AM = 1/2 l
30
$O_1O_2 = 2O_1K = CD = l$
$O_1C = AB = r$
MA = 1/2 r

Рис. 76

Эти уравнения являются параметрическими уравнениями траектории точки — эпициклоиды *.

Проекции скорости точки на оси координат:

$$v_x = \dot{x} = 24\pi\,(\cos 0{,}2\pi t - \cos 1{,}2\pi t)\ \text{см/с};$$

$$v_y = \dot{y} = 24\pi\,(-\sin 0{,}2\pi t + \sin 1{,}2\pi t)\ \text{см/с}.$$

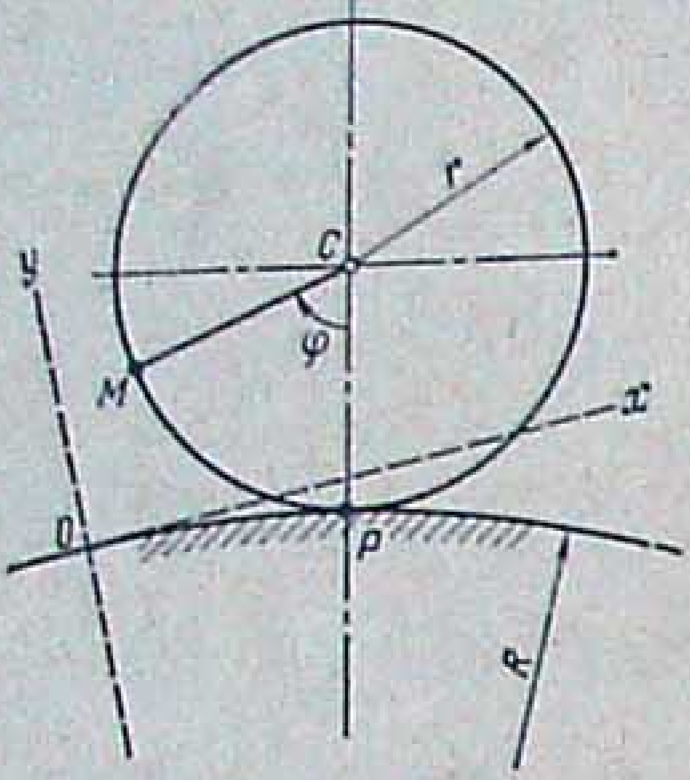


Рис. 77

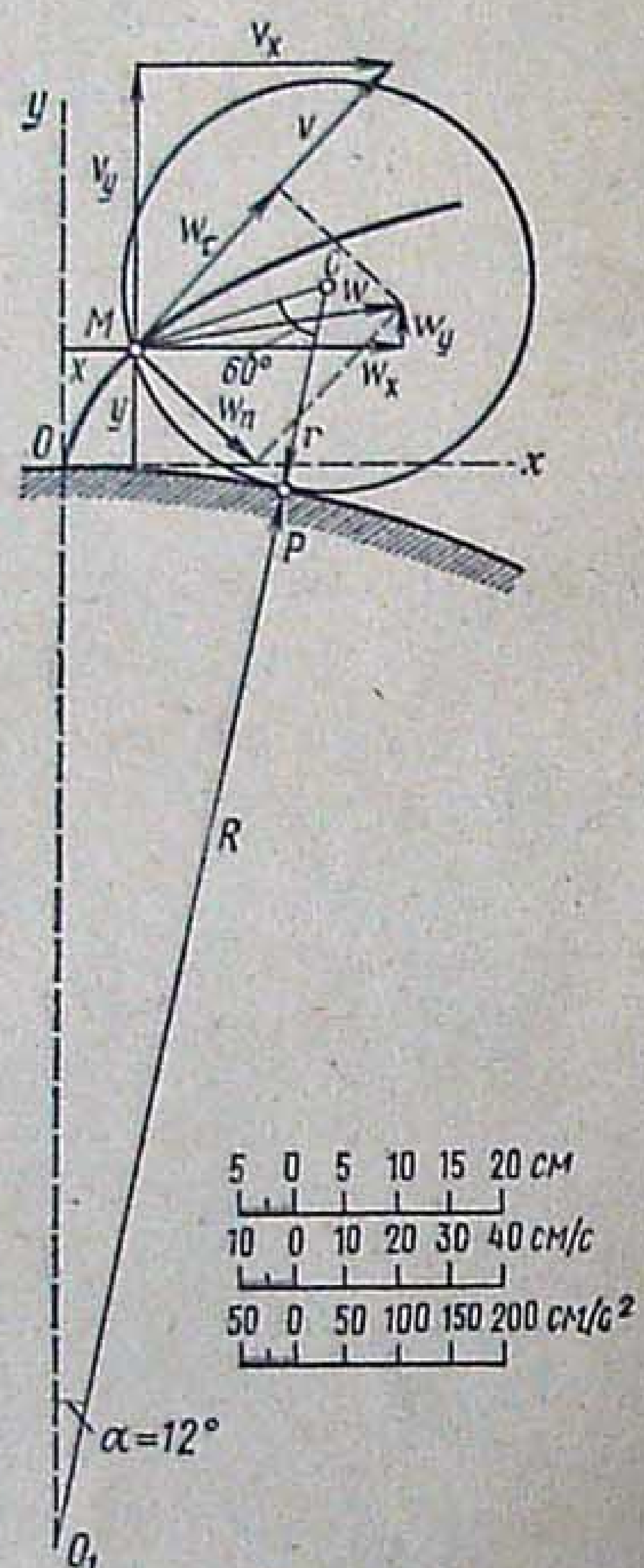


Рис. 79

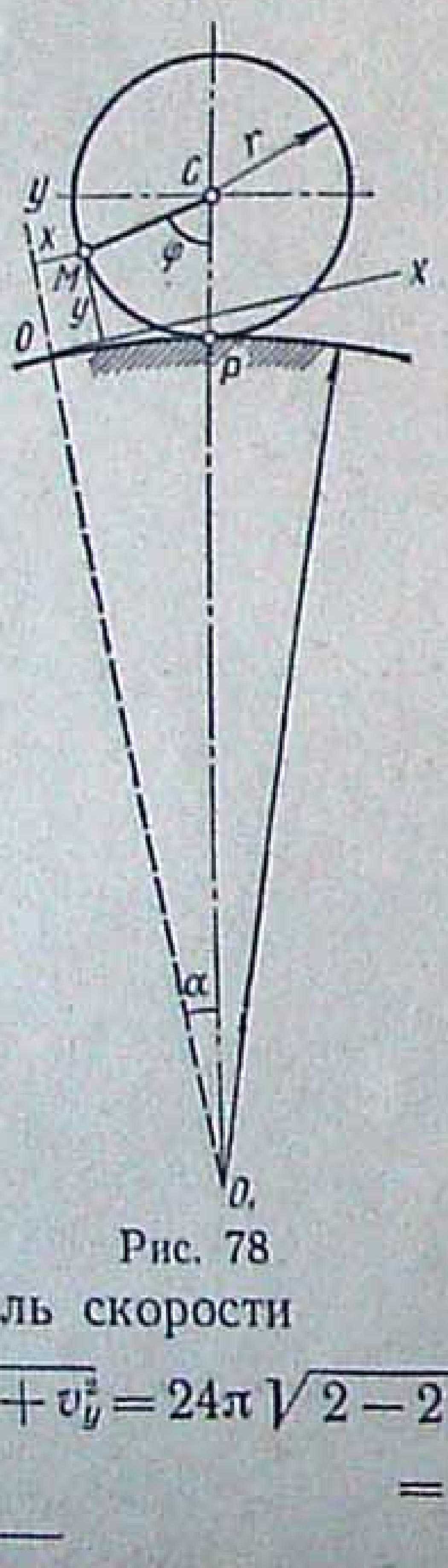


Рис. 78

Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 24\pi\sqrt{2 - 2\,(\cos 0{,}2\pi t \cdot \cos 1{,}2\pi t + \sin 0{,}2\pi t \cdot \sin 1{,}2\pi t)} =$$

$$= 24\pi\sqrt{2\,(1 - \cos \pi t)}$$

---

* В некоторых вариантах задания можно исключить параметр t из уравнений движения и получить уравнение траектории в обычной координатной форме.

или окончательно

$$v=48\pi\left|\sin\frac{\pi t}{2}\right| \text{ см/с}. \tag{2}$$

Проекции ускорения точки на оси координат

$$w_x=\ddot{x}=4,8\pi^2(-\sin 0,2\pi t+6\sin 1,2\pi t) \text{ см/с}^2;$$
$$w_y=\ddot{y}=4,8\pi^2(-\cos 0,2\pi t+6\cos 1,2\pi t) \text{ см/с}^2.$$

Модуль ускорения

$$w=\sqrt{w_x^2+w_y^2}=$$
$$=4,8\pi^2\sqrt{37-12(\sin 0,2\pi t\cdot\sin 1,2\pi t+\cos 0,2\pi t\cdot\cos 1,2\pi t)}$$

или

$$w=4,8\pi^2\sqrt{37-12\cos\pi t} \text{ см/с}^2.$$

Так как в данном примере для модуля скорости точки получено простое выражение, то модуль касательного ускорения находим не по формуле

$$w_\tau=\left|\frac{v_xw_x+v_yw_y}{v}\right|,$$

а непосредственным дифференцированием выражения (2):

$$w_\tau=\left|\frac{dv}{dt}\right|$$

или

$$w_\tau=24\pi^2\left|\cos\frac{\pi t}{2}\right| \text{ см/с}^2.$$

Модули скорости и ускорения точки, их проекции на оси координат, а также касательное и нормальное ускорения, вычисленные для заданного момента времени $t=1/3$ с, приведены в табл. 26.

Таблица 26

Скорость, см/с			Ускорение, см/с²					Радиус кривизны, см
v_x	v_y	v	w_x	w_y	w	w_τ	w_n	ρ
50,4	56,0	75,4	260	41	263	204	166	34,3

Нормальное ускорение точки

$$w_n=\sqrt{w^2-w_\tau^2}=\sqrt{263^2-204^2}=166 \text{ см/с}^2.$$

Радиус кривизны

$$\rho=v^2/w_n=75,4^2/166=34,3 \text{ см}.$$

Значения w_n и ρ также приведены в табл. 26.

На чертеже (рис. 79) показан участок траектории точки M, построенный по уравнениям (1), а также ее скорость, ускорение и все их составляющие. Таким образом, как и при выполнении задания К-1, осуществляется графическая проверка правильности вычислений.

II. Кинематика твердого тела

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

(К-2)

Задание К-3. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях

По заданному уравнению прямолинейного поступательного движения груза *1* определить скорость, а также вращательное, центростремительное и полное ускорения точки *M* механизма в момент времени, когда путь, пройденный грузом, равен *s*. Схемы механизмов показаны на рис. 80—82, а необходимые для расчета данные помещены в табл. 27.

Таблица 27

Номер варианта (рис. 80—82)	Радиусы, см				Уравнение движения груза *1* $x = x(t)$ (x — в см, t — в с)	s, м
	R_2	r_2	R_3	r_3		
1	60	45	36	—	$10+100\ t^2$	0,5
2	80	—	60	45	$80\ t^2$	0,1
3	100	60	75	—	$18+70\ t^2$	0,2
4	58	45	60	—	$50\ t^2$	0,5
5	80	—	45	30	$8+40\ t^2$	0,1
6	100	60	30	—	$5+60\ t^2$	0,5
7	45	35	105	—	$7+90\ t^2$	0,2
8	35	10	10	—	$4+30\ t^2$	0,5
9	40	30	15	—	$3+80\ t^2$	0,2
10	15	—	40	35	$70\ t^2$	0,4
11	40	25	20	—	$5+40\ t^2$	0,3
12	20	15	10	—	$2+50\ t^2$	0,1
13	30	20	40	—	$60\ t^2$	0,4
14	15	10	15	—	$6+20\ t$	0,1
15	15	10	15	—	$8+40\ t^2$	0,3
16	20	15	15	—	$3+40\ t^2$	0,4
17	15	10	20	—	$80\ t^2$	0,6
18	20	15	10	—	$4+20\ t$	0,3
19	15	10	20	—	$5+80\ t^2$	0,2
20	25	15	10	—	$50\ t^2$	0,3
21	20	10	30	10	$4+90\ t^2$	0,5
22	40	20	35	—	$10+40\ t^2$	0,5
23	40	30	30	15	$7+40\ t$	0,6
24	30	15	40	20	$90\ t^2$	0,2
25	50	20	60	—	$2+50\ t$	0,5
26	32	16	32	16	$5+60\ t^2$	0,1
27	40	18	40	18	$6+30\ t^2$	0,3
28	40	20	40	15	$50\ t^2$	0,4
29	25	20	50	25	$3+30\ t$	0,6
30	30	15	20	—	$5+60\ t^2$	0,2

Пример выполнения задания. Исходные данные: схема механизма (рис. 83); $x = 2 + 70\ t^2$ см; (t — в с); $R_2 = 50$ см; $r_2 = 30$ см; $R_3 = 60$ см; $r_3 = 40$ см; $s = 40$ см.

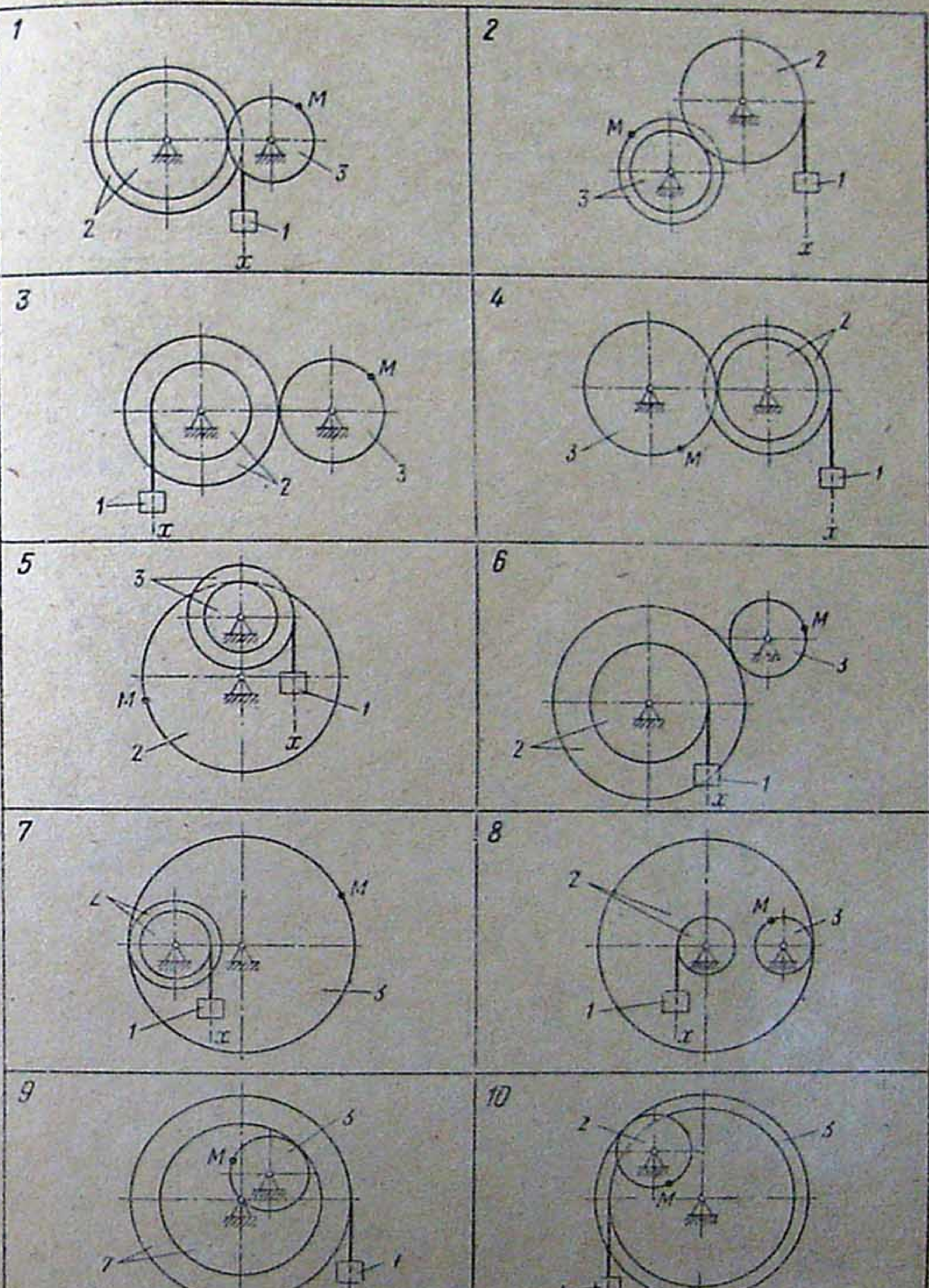


Рис. 80

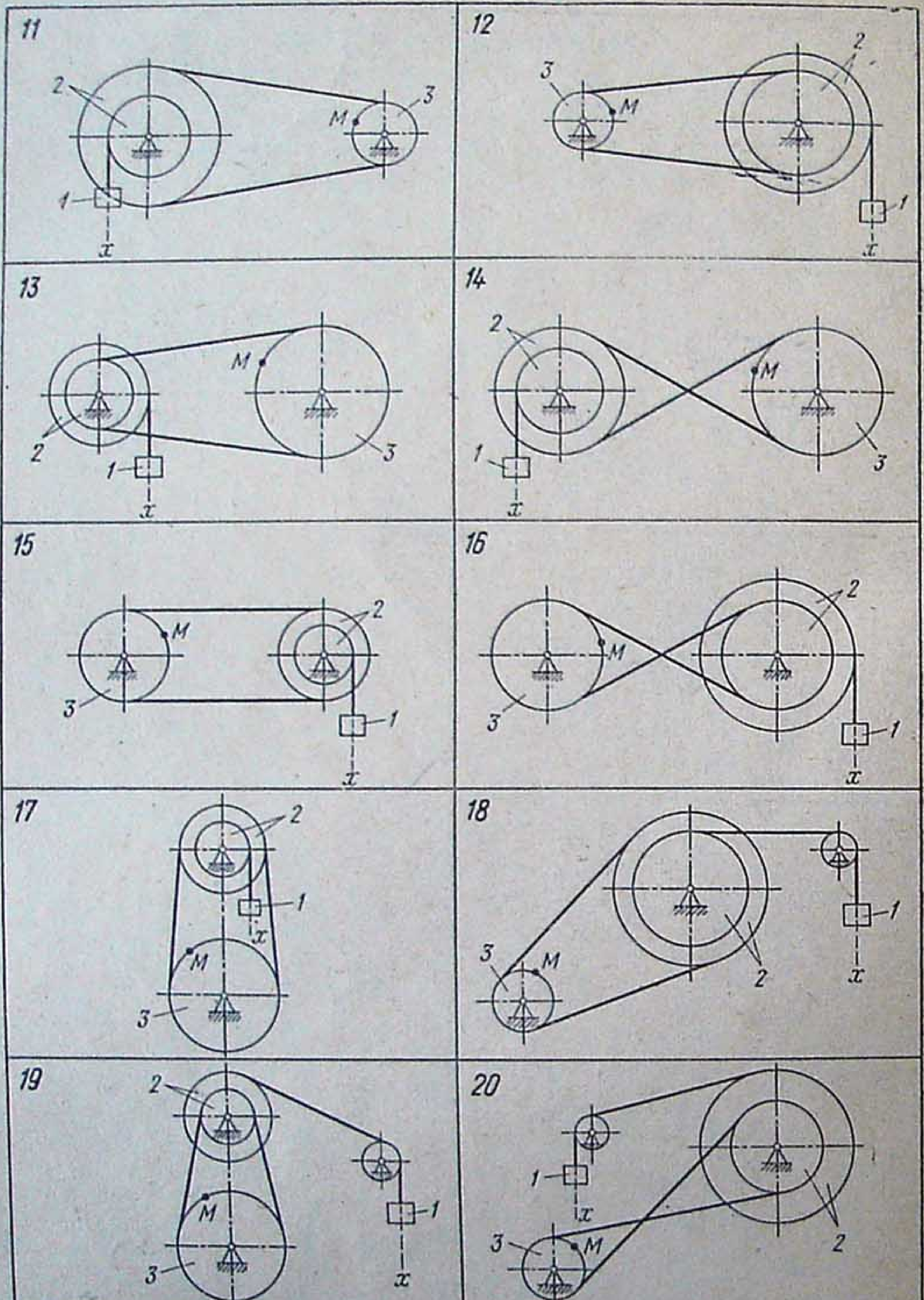


Рис. 81

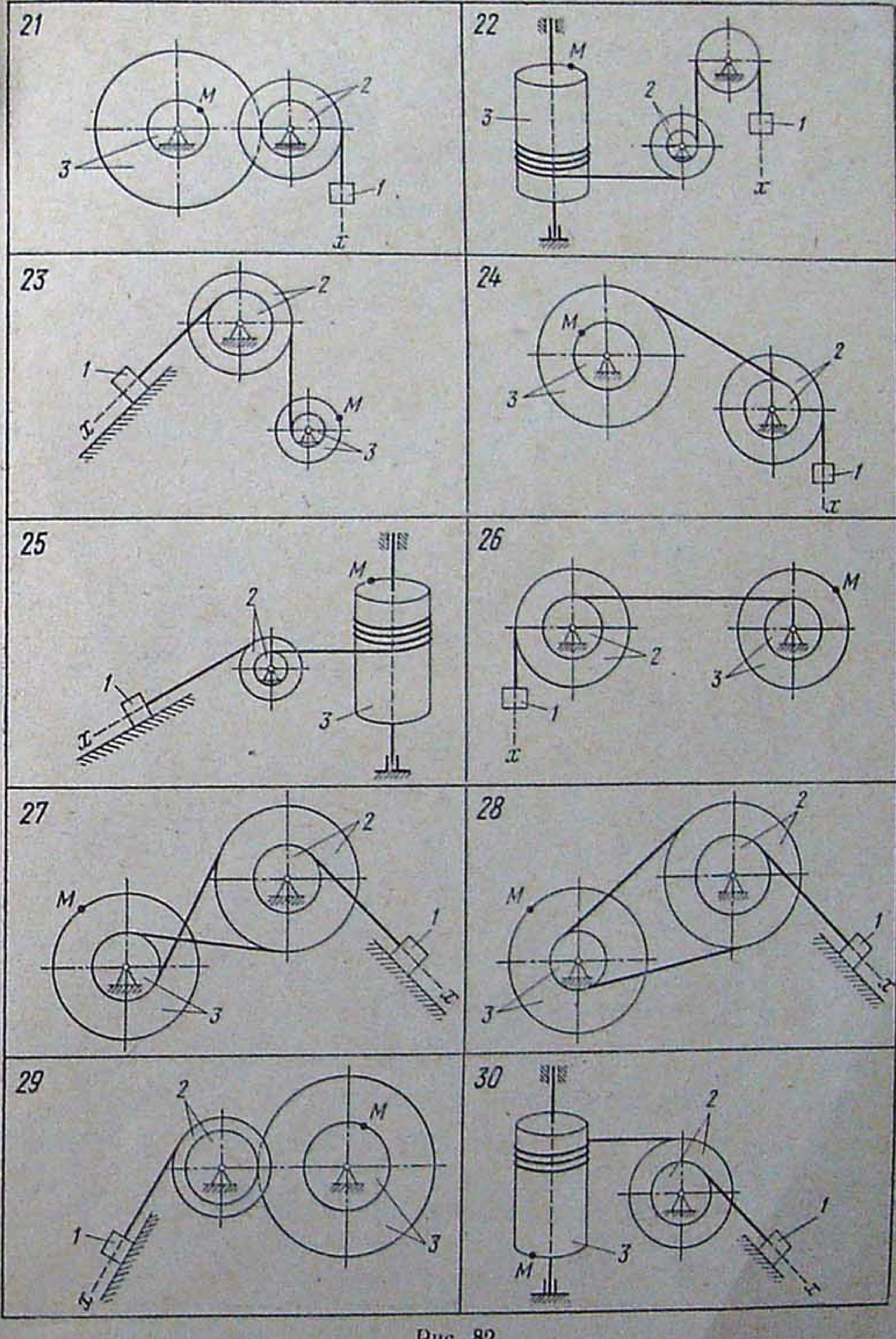


Рис. 82

Решение. Найдем момент времени τ, когда путь s, пройденный грузом, равен 40 см:

$$s = x_{(t-\tau)} - x_{(t-0)} = 70\ \tau^2,$$

откуда

$$\tau = \sqrt{s/70} = \sqrt{40/70} = 0{,}76\ \text{с}.$$

Дифференцированием по времени уравнения движения найдем скорость груза:

$$v_1 = |\dot{x}| = 140\ t\ \text{см/с}.$$

Угловая скорость звена 2

$$\omega_2 = v_1/r_2 = 140\ t/30 = (14/3)\cdot t\ \text{с}^{-1}.$$

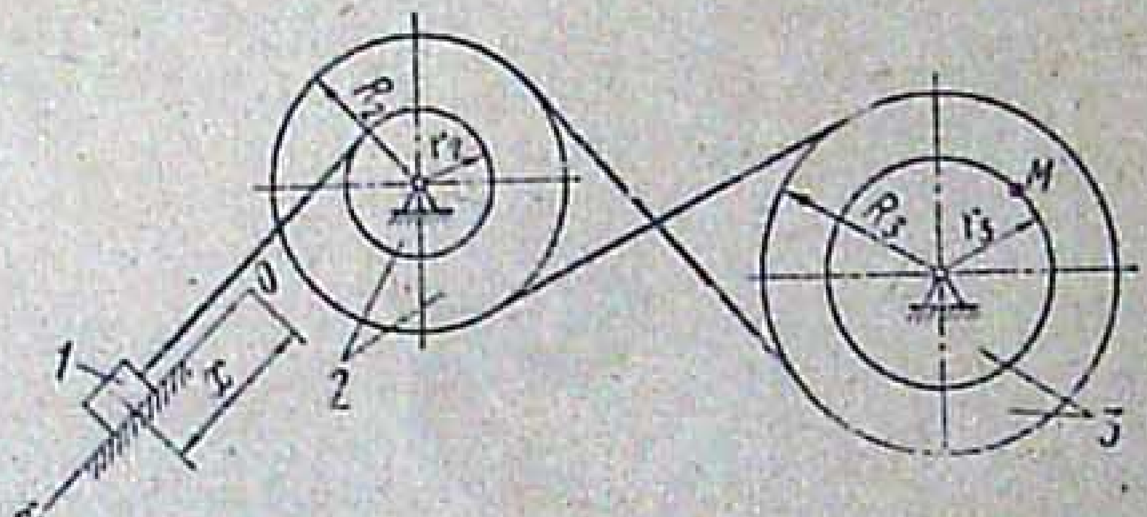


Рис. 83

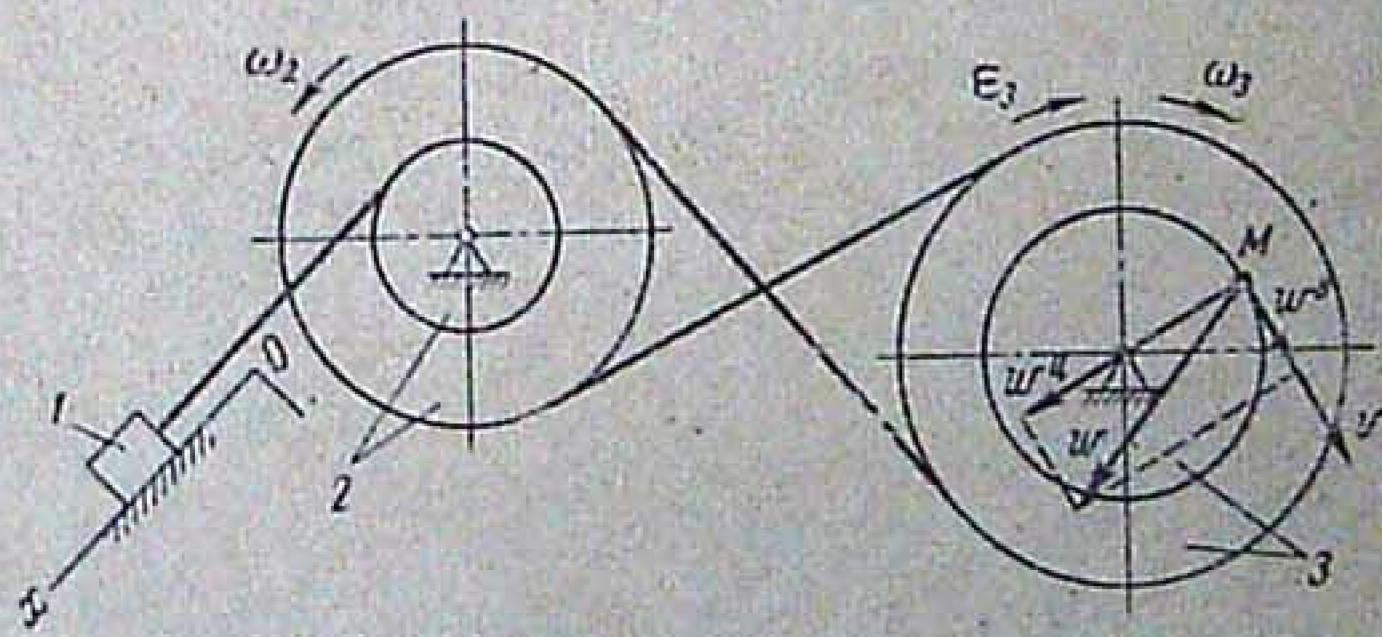


Рис. 84

Угловые скорости колес 2 и 3, связанных гибкой передачей, обратно пропорциональны радиусам этих колес, т. е.

$$\omega_2/\omega_3 = R_3/R_2,$$

откуда

$$\omega_3 = (R_2/R_3)\cdot\omega_2 = (50/60)\cdot(14/3)\cdot t = (35/9)\cdot t\ \text{с}^{-1}.$$

Угловое ускорение

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 35/9\ \text{с}^{-2} = \text{const}.$$

Скорость точки M

$$v = r_3\omega_3 = 40\ \omega_3$$

и направлена перпендикулярно к радиусу в сторону вращения колеса 3.